Kvalifikacije rješenja 2025. g.

1. Kolika je prividna kutna udaljenost Marsa od Sunca za motritelja na Jupiteru ako se Mars nalazi u afelu svoje staze u vrijeme maksimalne elongacije kada je opažan.

Ukupno 4 boda

$$\sin\phi = \frac{R_M \cdot (1+e)}{R_J} = \frac{2{,}279 \cdot 10^{11}\,\text{m} \cdot (1+0{,}0935)}{7{,}78 \cdot 10^{11}\,\text{m}} = 0{,}3203$$ **2 boda**

$$\phi = \arcsin 0{,}3203 = 18{,}68° = 18°40'52''$$ **2 boda**

2. Astronom-astronaut promatra Sunce s Marsa teleskopom žarišne daljine 3 m, promjera objektiva 30 cm i koristi okular prividnog vidnog polja 60°. Izračunajte:

a) koliki je f-broj teleskopa?

b) koliki je promjer slike Sunca koja nastaje u žarištu teleskopa?

c) koliko je povećanje teleskopa ako slika Sunca zauzima cijelo stvarno vidno polje teleskopa?

d) kolika je žarišna daljina okulara iz zadatka c)?

e) ako se Sunce nalazi na Marsovom nebu na deklinaciji $\delta = -22°$, koliko je vremena potrebno Suncu da u potpunosti (od 1. do 4. kontakta) prođe kroz sredinu vidnog polja teleskopa, ako astronom koristi isti okular iz zadatka c) i ne koristi praćenje teleskopa?

6 bodova

a) $\text{f-broj} = \frac{F}{D} = \frac{3000\,\text{mm}}{300\,\text{mm}} = 10 \Rightarrow f/10$ **1 bod**

b) $$\text{tg}\frac{\phi_S}{2} = \frac{r}{d} = \frac{6{,}96 \cdot 10^5\ \text{km}}{2{,}279 \cdot 10^8\ \text{km}} = 3{,}054 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\phi_S}{2} = \text{arctg}\, 3{,}054 \cdot 10^{-3} = 0{,}175° \Rightarrow \phi_S = 2 \cdot 0{,}175° = 0{,}35° = 21'$$

$$d = F \cdot \text{tg}\varphi_S = 3000\,\text{mm} \cdot \text{tg}\, 0{,}35° = 18{,}3\,\text{mm}$$ **1 bod**

c) $SVP = \frac{PVP}{A} \Rightarrow A = \frac{PVP}{SVP} = \frac{60°}{0{,}35°} = 171{,}4\times$ **1 bod**

d) $A = \frac{F}{f} \Rightarrow f = \frac{F}{A} = \frac{3000\,\text{mm}}{171,4} = 17,5\,\text{mm}$ **1 bod**

e) Zbog deklinacije Sunca, kut koji Sunce prođe kroz vidno polje teleskopa je:

$$\eta = 2 \cdot \phi_S \cdot \frac{1}{\cos\delta} = 2 \cdot 0,35° \cdot \frac{1}{\cos -22°} = 0,755°$$ **1 bod**

$$\frac{T}{360°} = \frac{x}{\eta} \Rightarrow x = \frac{T \cdot \eta}{360°} = \frac{88775\,\text{s} \cdot 0,755°}{360°} = 186,2\,\text{s}$$ **1 bod**

3. Izračunajte najveći i najmanji iznos godišnje aberacije svjetlosti za motritelja na Marsovom ekvatoru koji promatra zvijezdu koja se nalazi na Marsovom ekliptičkom polu. Odredite iznos dnevne aberacije svjetlosti koju isti motritelj opaža za zvijezdu koja se nalazi na Marsovom nebeskom polu. **Ukupno 9 bodova**

$$d_\text{p} = a(1-e) = 227,9 \cdot 10^6\,\text{km} \cdot (1-0,0935) = 206,6 \cdot 10^6\ \text{km}$$ **1 bod**

$$d_\text{a} = a(1+e) = 227,9 \cdot 10^6\,\text{km} \cdot (1+0,0935) = 249,2 \cdot 10^6\ \text{km}$$ **1 bod**

$$v_\text{p} = \sqrt{\frac{GM(1+e)}{d_\text{p}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\,\text{kg} \cdot (1+0,0935)}{206,6 \cdot 10^9\ \text{m}}} = 26,51\,\text{km/s}$$ **1 bod**

$$v_\text{a} = \sqrt{\frac{GM(1-e)}{d_\text{a}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\,\text{kg} \cdot (1-0,0935)}{249,2 \cdot 10^9\ \text{m}}} = 21,97\,\text{km/s}$$ **1 bod**

$$\sin\phi = \frac{v}{c}$$ **1 bod**

$$\phi_\text{min} = \arcsin\frac{v_\text{a}}{c} = \arcsin\frac{21,97\,\text{km/s}}{300000\,\text{km/s}} = 4,196 \cdot 10^{-3}(°) = 15,1''$$ **1 bod**

$$\phi_\text{max} = \arcsin\frac{v_\text{p}}{c} = \arcsin\frac{26,51\,\text{km/s}}{300000\,\text{km/s}} = 5,063 \cdot 10^{-3}(°) = 18,2''$$ **1 bod**

Dnevna aberacija:

$$v_e = \frac{2R_M\pi}{T_M} = \frac{2 \cdot 3390\,\text{km}\cdot\pi}{88620\,\text{s}} = 240{,}3\,\text{m/s}$$ **1 bod**

$$\phi_d = \arcsin\frac{v_e}{c} = \text{arctg}\frac{0{,}2403\,\text{km/s}}{300000\,\text{km/s}} = 4{,}59\cdot 10^{-5}(^\circ) = 0{,}165''$$ **1 bod**

4. Temperatura bijelog patuljka iznosi 18000 K, promjer mu je 14000 km, udaljen je 40 s. g. i približava nam se brzinom od 40 km/s. Odredite prividnu i apsolutnu zvjezdanu veličinu bijelog patuljka i valnu duljinu maksimuma njegova zračenja koju opažamo sa Zemlje.

Ukupno 11 bodova

$$L_{bp} = \sigma \cdot S \cdot T^4 = 5{,}6705\cdot 10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}\cdot 4\cdot(7\cdot 10^6\,\text{m})^2\cdot\pi\cdot 18000^4\text{K}^4 = 3{,}665\cdot 10^{24}\,\text{W}$$

2 boda

$$\frac{L_S}{L_{bp}} = 2{,}512^{M_{bp}-M_S} \Rightarrow (M_{bp} - M_S)\cdot\log 2{,}512 = \log\frac{L_S}{L_{bp}}$$ **1 bod**

$$M_{bp} = \frac{\log\frac{L_S}{L_{bp}}}{0{,}4} + M_S = \frac{2{,}02}{0{,}4} + 4{,}82^m = 9{,}87^m$$ **1 bod**

$$M = m + 5 - 5\log d\,[\text{pc}]$$ **1 bod**

$$m_{bp} = M_{bp} - 5 + 5\log d = 9{,}87 - 5 + 5\log 12{,}3 = 10{,}32^m$$ **1 bod**

$$b = \lambda_m \cdot T_m \Rightarrow \lambda_m = \frac{b}{T_m} = \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}\,\text{mK}}{18000\,\text{K}} = 1{,}61111\cdot 10^{-7}\,\text{m}$$ **2 boda**

$$z = -\frac{v}{c} = -\frac{40\,\text{km/s}}{300000\,\text{km/s}} = -1{,}3333\cdot 10^{-4} \quad ; \quad z = \frac{\lambda - \lambda_m}{\lambda_m}$$ **2 boda**

$$\lambda = z\lambda_m + \lambda_m = -1{,}3333\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}61111\cdot 10^{-7}\,\text{m} + 1{,}61111\cdot 10^{-7}\,\text{m} = 1{,}61108\cdot 10^{-7}\,\text{m}$$ **1 bod**

5. Izračunajte koliko može iznositi srednja udaljenost hipotetskog planeta oko Sunca (izražena u AJ) čiji sinodički period, gledano sa Zemlje iznosi 3,5 godine?

5 bodova

Planet može biti donji ili gornji **1 bod**

a) donji planet:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{A}+\frac{1}{S}\Rightarrow T=\frac{A\cdot S}{A+S}=\frac{3{,}5}{4{,}5}=0{,}778\,\text{god.}$$ **1 bod**

$$a=\sqrt[3]{T^2}=\sqrt[3]{0{,}778^2}=0{,}846\,\text{AJ}$$ **1 bod**

b) gornji planet

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{A}-\frac{1}{S}\Rightarrow T=\frac{A\cdot S}{A-S}=\frac{3{,}5}{2{,}5}=1{,}4\,\text{god.}$$ **1 bod**

$$a=\sqrt[3]{T^2}=\sqrt[3]{1{,}4^2}=1{,}251\,\text{AJ}$$ **1 bod**

6. Na središtu Sunčeve ploče nalazi se pjega u promjeru dva puta veća od Zemlje. Kad bi cijelo Sunce nestalo, a ostala samo ta pjega, kolika bi bila njena prividna zvjezdana veličina?

5 bodova

Rješenje:

Efektivna temperatura pjege je 4300 K- 4800K **1 bod**

$$L_{\text{pjega}}=\sigma\cdot r_{\text{pjega}}^2\pi\cdot T^4=5{,}6705\cdot10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}\cdot(2\cdot6{,}3781\cdot10^6\text{m})^2\cdot\pi\cdot4500^4\text{K}^4=1{,}189\cdot10^{21}\text{W}$$

1 bod

$$\frac{L_{\text{Sunce}}}{L_{\text{pjega}}}=2{,}512^{m_{\text{pjega}}-m_{\text{Sunce}}}\Rightarrow\log\frac{L_{\text{Sunce}}}{L_{\text{pjega}}}=(m_{\text{pjega}}-m_{\text{Sunce}})\log2{,}512$$ **1 bod**

$$m_{\text{pjega}}=\frac{\log\dfrac{L_{\text{Sunce}}}{L_{\text{pjega}}}}{\log2{,}512}+m_{\text{Sunce}}=\frac{\log\dfrac{3{,}86\cdot10^{26}\,\text{W}}{1{,}189\cdot10^{21}\,\text{W}}}{0{,}4}-26{,}8^m=-15{,}52^m$$ **2 boda**

7. Hipotetska zvijezda je udaljena 6,33 svjetlosnih godina i približava nam se radijalnom brzinom od 121 km/s. Kada bi ta brzina bila konstantna, izračunajte za koliko godina će prividna zvjezdana veličina te zvijezde iznositi 8^{m}. Na kojoj udaljenosti će se tada nalaziti? Apsolutna zvjezdana veličina hipotetske zvijezde iznosi $13{,}22^{\text{m}}$.

6 bodova

r = 6,33 g.s. = 1,94 pc

$M = m + 5 - 5\log r\,(\text{pc})$ **1 bod**

$m = M\text{-}5 + 5\log\ r = 13{,}22\text{-}5 + 5 \cdot \log 1{,}94 = 9{,}659^{\mathrm{m}}$ **1 bod**

$\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1} = 2{,}512^{1{,}659} = 4{,}61$ **1 bod**

$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} = 6{,}33\,\text{s.g.} \sqrt{\frac{1}{4{,}61}} = 2{,}95\,\text{s.g.}$ **1 bod**

$\Delta r = r_1 - r_2 = 6{,}33 - 2{,}95 = 3{,}38\,\text{s.g.}$ **1 bod**

$1\,\text{s.g.} = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} \cdot 300000\,\text{km/s} = 9{,}467 \cdot 10^{12}\,\text{km}$

$\Delta r = 3{,}38 \cdot 9{,}467 \cdot 10^{12}\,\text{km} = 3{,}2 \cdot 10^{13}\,\text{km}$

$t = \frac{\Delta r}{v} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{13}\,\text{km}}{121\,\text{km/s}} = 2{,}645 \cdot 10^{11}\,\text{s} = 8380\,\text{god.}$ **1 bod**

8. Odredite polumjer Betelgeza ako mu je apsolutna zvjezdana veličina M = -5,85$^{\mathrm{m}}$, a površinska temperatura 3600 K.

4 boda

$\frac{L_{\mathrm{B}}}{L_{\mathrm{S}}} = 2{,}512^{M_{\mathrm{S}} - M_{\mathrm{A}}} = 2{,}512^{4{,}82+5{,}85} \approx 18500$ **1 bod**

$L_{\mathrm{B}} = 18500 \cdot L_{\mathrm{S}} = 18500 \cdot 3{,}86 \cdot 10^{26} = 7{,}141 \cdot 10^{30}\,\text{W}$ **1 bod**

$L_{\mathrm{B}} = \sigma \cdot 4 r_{\mathrm{A}}^2 \pi \cdot T^4 \Rightarrow \mathrm{r_A} = \sqrt{\frac{\mathrm{L_A}}{4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{7{,}141 \cdot 10^{30}\,\text{W}}{4\pi \cdot 5{,}6705 \cdot 10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \cdot 3600^4\,\text{K}^4}} = 2{,}44 \cdot 10^{11}\,\text{m}$

1+1 bod

9. Sa Zemlje je poslana letjelica koja može razvući solarno jedro. Automatika na letjelici zadužena je da uvijek orijentira jedro kvadratnog oblika na način da Sunčeve zrake uvijek padaju okomito na njega, a ujedno omogućava da se jedro, ovisno o potrebi, može razvući na različite dimenzije. Koliko mora biti velika stranica jedra da bi sila nastala od tlaka Sunčeva zračenja bila jednaka gravitacijskoj sili između Sunca i letjelice mase 1700 kg ako je udaljena 120 milijuna kilometara od Sunca i ako miruje relativno u odnosu na Sunce. Kolika bi morala biti velika stranica jedra kada bi se željelo da letjelica miruje u odnosu na Sunce na udaljenosti od 240 milijuna km?

8 bodova

$p_{\mathrm{z}} = \frac{F}{A} = \frac{2}{c} \cdot \frac{\Delta E}{A \Delta t} = \frac{2}{c} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{2}{c} \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot L_{\mathrm{S}}$ **2 boda**

$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{z}}$ **1 bod**

$F_{\mathrm{z}} = p_{\mathrm{z}} \cdot A$ **1 bod**

$G\dfrac{M_{\mathrm{S}}m}{r^2} = \dfrac{L_{\mathrm{S}}}{2\pi c r^2} \cdot a^2 \Rightarrow$ **1 bod**

$\Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{2\pi c G M_{\mathrm{S}} m}{L_{\mathrm{S}}}} \Rightarrow$ **1 bod**

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 1700\mathrm{kg}}{3,86 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}} = 1050\,\mathrm{m}$ **1 bod**

Površina jedra ostala bi ista. **1 bod**