

1. Apsolutna bolometrijska zvjezdana veličina bijelog patuljka iznosi  $13^m$ . Na kolikoj udaljenosti od njega bi se trebalo nalaziti nebesko tijelo slično našem Mjesecu da bi prosječna efektivna temperatura na njemu bila jednaka kao i na Mjesecu? Izračunajte iznos te temperature.

$$M_{bp} = 13^m$$

$$d_{Mj} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$$

$$A_{Mj} = 0,136$$

$$r_{Mj} = 1738 \text{ km}$$

$$M_{Sun} = 4,82^m$$

$$L_{Sun} = 3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

$$\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

$$d_{bp-M} = ?$$

$$T_{ef} = ?$$

Solarna konstanta na Mjesecu:

$$F_M = \frac{L_{Sun}}{4d_{Mj}^2 \pi} = \frac{3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4(1,496 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \pi} = 1373 \text{ W/m}^2 \quad (1 \text{ bod})$$

Ukupna snaga zračenja koja dolazi na površinu Mjeseca:

$$L_{uk} = F_M \cdot r_{Mj}^2 \cdot \pi = 1373 \text{ Wm}^{-2} \cdot (1,738 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \pi = 1,30 \cdot 10^{16} \text{ W} \quad (1 \text{ bod})$$

Iznos snage zračenja koju apsorbira Mjesec:

$$L_{uk-A} = (1 - A_{Mj}) \cdot L_{uk} = (1 - 0,136) \cdot 1,30 \cdot 10^{16} \text{ W} = 1,12 \cdot 10^{16} \text{ W} \quad (1 \text{ bod})$$

$$L_{uk-A} = \sigma S_{Mj} T_{ef}^4 = \sigma \cdot 4 \cdot r_{Mj}^2 \cdot \pi \cdot T_{ef}^4 \Rightarrow T_{ef} = \sqrt[4]{\frac{L_{uk-A}}{\sigma \cdot 4 \cdot r_{Mj}^2 \cdot \pi}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$T_{ef} = \sqrt[4]{\frac{1,12 \cdot 10^{16} \text{ W}}{5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \cdot 4 \cdot (1,738 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \pi}} = 269 \text{ K} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\frac{L_{Sun}}{L_{bp}} = 2,512^{M_{bp} - M_{Sun}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$L_{bp} = \frac{L_{Sun}}{2,512^{M_{bp} - M_{Sun}}} = \frac{3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}}{2,512^{13-4,8}} = 2,03 \cdot 10^{23} \text{ W} \quad (1 \text{ bod})$$

$$L_{bp} = F_{Mj} \cdot 4(d_{bp-M})^2 \pi \Rightarrow d_{bp-M} = \sqrt{\frac{L_{bp}}{F_{Mj} \cdot 4\pi}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_{bp-M} = \sqrt{\frac{2,03 \cdot 10^{23} \text{ W}}{1373 \text{ Wm}^{-2} \cdot 4\pi}} = 3,43 \cdot 10^9 \text{ m} = 3,43 \text{ milijuna km} \quad (1 \text{ bod})$$

Ukupno: 9 bodova

2. Astronom promatra cirkumpolarnu zvijezdu s nepoznate lokacije na sjevernoj Zemljinoj polutci. Izmjerio je da je najmanja visina zvijezde iznad horizonta  $38^\circ$ , a najveća  $78^\circ$ . Mjesno zvjezdano vrijeme kada je zvijezda bila u donjoj kulminaciji je  $LST=3 \text{ h}$ . Izračunajte koje su sve mogućnosti

rektascenzije i deklinacije zvijezde, te geografske širine promatranja.

$$h_d = 38^\circ$$
$$h_g = 78^\circ$$
$$LST = 3\text{h}$$

$$\alpha = ? , \delta = ? , \varphi = ?$$

$$LST = HA_{\text{projletne točke}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\text{Satni kut zvijezde u donjoj kulminaciji je: } HA_{\text{zvijezde}} = HA_{\text{donja kulm}} = 12 \text{ h} \quad (1 \text{ bod})$$

$$LST = \alpha + HA_{\text{zvijezde}} \Rightarrow \alpha = LST - HA_{\text{zvijezde}} = 3 \text{ h} - 12 \text{ h} = -9 \text{ h} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\text{Kako je } HA_{\text{zvijezde}} > LST, \text{ dodajemo } 24 \text{ h, te je } \alpha = -9 \text{ h} + 24 \text{ h} = 15 \text{ h} \quad (1 \text{ bod})$$

Rješenje za rektascenziju je jedinstveno.

Za izračun deklinacije i geografske širine imamo dvije mogućnosti:

**a) gornja kulminacija je izmjerena sjeverno od zenita, tj.  $h_g = 78^\circ\text{N}$ , te je tada:**

$$\phi = h_d + \frac{h_g - h_d}{2} = 38^\circ + \frac{78^\circ - 38^\circ}{2} = 58^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

$$\delta = 90^\circ - (\phi - h_d) = 90^\circ - (58^\circ - 38^\circ) = 70^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

**b) gornja kulminacija je izmjerena južno od zenita, tj.  $h_g = 78^\circ\text{S}$**

$$\phi = h_d + \frac{90^\circ - h_g + 90^\circ - h_d}{2} = 38^\circ + \frac{90^\circ - 78^\circ + 90^\circ - 38^\circ}{2} = 70^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

$$\delta = 90^\circ - (\phi - h_d) = 90^\circ - (70^\circ - 38^\circ) = 58^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

---

Ukupno: 8 bodova

3. Radioteleskopom je opažan izvangalaktički oblak neutralnog vodika. Izmjereno je najjače zračenje na valnoj duljini od 21,5 cm, a širina izmjerene spektralne linije iznosila je 0,1 mm. U laboratorijskim uvjetima neutralni vodik najviše zrači na valnoj duljini od 21 cm. Prividne kutne dimenzije oblaka vodika su iznosile 2". Kolika je masa tog izvangalaktičkog oblaka neutralnog vodika?

$$\lambda_0 = 21 \text{ cm}$$

$$\lambda_i = 21,5 \text{ cm}$$

$$\lambda_{\text{širina}} = 0,1 \text{ mm}$$

$$\phi = 2'' = 5,56 \cdot 10^{-4} (^\circ)$$

$$H = 69 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

$$c = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$1 \text{ AJ} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

---

$$M = ?$$

$$v = cz = c \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} \cdot \frac{21,5 \text{ cm} - 21 \text{ cm}}{21 \text{ cm}} = 7,14 \cdot 10^3 \text{ km/s} \quad (1 \text{ bod})$$

$$v = H \cdot r \Rightarrow r = \frac{v}{H} = \frac{7,14 \cdot 10^3 \text{ km/s}}{69 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}} = 103,5 \text{ Mpc} = 3,19 \cdot 10^{24} \text{ m} \quad (1 \text{ bod})$$

$$R = r \cdot \text{tg} \frac{\phi}{2} = 3,19 \cdot 10^{24} \text{ m} \cdot \text{tg} 2,78 \cdot 10^{-4} (^\circ) = 1,55 \cdot 10^{19} \text{ m} \quad (1 \text{ bod})$$

Opažena širina spektralne linije nastaje zbog Dopplerovog učinka uslijed gibanja plina u oblaku (prema nama i od nas). Dakle, za određivanje brzine atoma plina uzimamo polovinu širine linije, a referentna valna duljina je ona na kojoj je obavljeno mjerenje, tj. 21,5 cm.

$$\frac{v_0}{c} = \frac{\lambda_{\text{širina}} / 2}{\lambda_1} \Rightarrow v_0 = c \frac{\lambda_{\text{širina}}}{2\lambda_1} \quad (1 \text{ bod})$$

$$v_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} \cdot \frac{0,1 \text{ mm}}{2 \cdot 215 \text{ mm}} = 69,8 \text{ km/s} \quad (1 \text{ bod})$$

Iz virijalnog teorema ili uz pretpostavku da je brzina atoma plina na udaljenosti R jednaka prvoj kozmičkoj brzini uz masu M:

$$2 \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{GM^2}{R} = 0$$

$$v_0^2 = \frac{GM}{R}$$

$$M = \frac{v_0^2 \cdot R}{G} \quad (1 \text{ bod})$$

$$M = \frac{(69800 \text{ m/s})^2 \cdot 1,55 \cdot 10^{19} \text{ m}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} = 1,13 \cdot 10^{39} \text{ kg} \quad (1 \text{ bod})$$

Ukupno: 7 bodova

4. Najveći luminozitet supernove tipa Ia u udaljenoj galaksiji je iznosio  $5,9 \cdot 10^9 L_{\text{Sunca}}$ . Na osnovu promatranja teleskopom je utvrđeno da joj sjaj iznosi  $2 \cdot 10^{-8}$  sjaja Sirijusa. Crveni pomak galaksije iznosi 0,06. Izračunajte udaljenost galaksije u parsecima i Hubbleovo vrijeme za ovaj slučaj.

$$m_{\text{Sunca}} = -26,8^m$$

$$m_{\text{Sir}} = -1,46^m$$

$$z = 0,06$$

$$d_{\text{Sunca}} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

---

$$d_{\text{gal}} = ? ; t_{\text{H}} = ?$$

$$\frac{E_{\text{Sunca}}}{E_{\text{Sir}}} = 2,512^{m_{\text{Sir}} - m_{\text{Sunca}}} \Rightarrow E_{\text{Sir}} = \frac{E_{\text{Sunca}}}{2,512^{m_{\text{Sir}} - m_{\text{Sunca}}}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$E_{\text{Sir}} = \frac{E_{\text{Sunca}}}{2,512^{-1,46 - (-26,8)}} = 7,30 \cdot 10^{-11} E_{\text{Sunca}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$E_{\text{supernove}} = 2 \cdot 10^{-8} E_{\text{Sir}} = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 7,30 \cdot 10^{-11} E_{\text{Sunca}} = 1,46 \cdot 10^{-18} E_{\text{Sunca}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\frac{L_{\text{supernove}}}{4\pi \cdot d_{\text{gal}}^2} = 1,46 \cdot 10^{-18} \frac{L_{\text{Sunca}}}{4\pi \cdot d_{\text{Sunca}}^2} \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_{\text{gal}} = \sqrt{\frac{L_{\text{supernove}}}{1,46 \cdot 10^{-18} L_{\text{Sunca}}}} \cdot d_{\text{Sunca}} = \sqrt{\frac{5,9 \cdot 10^9 L_{\text{Sunca}}}{1,46 \cdot 10^{-18} L_{\text{Sunca}}}} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$d_{\text{gal}} = 6,36 \cdot 10^{13} \text{ AJ} = 9,51 \cdot 10^{24} \text{ m} \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_{\text{gal}} = \frac{9,51 \cdot 10^{24} \text{ m}}{3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}} = 308 \text{ Mpc} \quad (1 \text{ bod})$$

$$t_{\text{H}} = \frac{1}{H_0} = \frac{d_{\text{gal}}}{v_{\text{gal}}} = \frac{d_{\text{gal}}}{c \cdot z} \quad (1 \text{ bod})$$

$$t_{\text{H}} = \frac{9,51 \cdot 10^{24} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 0,06} = 5,28 \cdot 10^{17} \text{ s} = 16,7 \text{ milijardi godina}$$

(1 bod)

Ukupno: 8 bodova

5. Na prijenosnom teleskopu Zvezdarnice Zagreb nalazi se sljedeća oznaka 9 1/4" (235 mm)  $f/10$ . Kojim okularom možemo postići povećanje od 98 puta i koliko je prividno vidno polje okulara ako zaustavimo praćenje i izmjerimo da zvijezda na ekvatoru prođe kroz sredinu i preko cijelog vidnog polja za  $2^m 50^s$ ?

**5 bodova**

$$\frac{f}{10} = d \Rightarrow f = 10d = 10 \cdot 235 \text{ mm} = 2350 \text{ mm} \quad 1 \text{ bod}$$

$$P = \frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}} \Rightarrow f_{\text{ok}} = \frac{f_{\text{ob}}}{P} = \frac{2350 \text{ mm}}{98 \times} = 23,98 \text{ mm} \approx 24 \text{ mm} \quad 1 \text{ bod}$$

$$VP = t \cdot 15^{\circ/\text{h}} \frac{24^{\text{h}}}{23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}}} = \left( \frac{2^{\text{m}}}{60} + \frac{50^{\text{s}}}{3600} \right) \cdot 15^{\circ/\text{h}} \frac{24^{\text{h}}}{23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}}} = 42'37'' \quad 2 \text{ boda}$$

$$PVP = VP \cdot P = 42'37'' \cdot 98 \times = 69,6^{\circ} \quad 1 \text{ bod}$$

6. Horizontska paralaksa nekog planetoida iznosi je  $\varphi = 6,12''$ . Izračunajte njegovu udaljenost od Sunca u tom trenutku ako se tada nalazio u položaju istočne kvadrature i u ravnini ekliptike.

**5 bodova**

$$\tan \varphi = \frac{r_z}{d_z} \Rightarrow d_z = \frac{r_z}{\tan \varphi} \quad 1 \text{ bod}$$

$$d_z = \frac{6378 \text{ km}}{\tan 6,12''} = 2,15 \cdot 10^8 \text{ km} \quad 2 \text{ boda}$$

$$d_s = \sqrt{d_z^2 + d_{z_s}^2} = \sqrt{(2,15 \cdot 10^8 \text{ km})^2 + (1,496 \cdot 10^8 \text{ km})^2} = 2,62 \cdot 10^8 \text{ km} \quad 2 \text{ boda}$$

7. Kojom najmanjom brzinom se treba gibati čestica u sredstvu indeksa loma  $n = 1,5$  kako bi nastalo Čerenkovljevo zračenje? Koliki je kut stošca  $\varphi$  Čerenkovljeva zračenja u tom sredstvu ako se čestica giba brzinom od  $220\,000 \text{ km/s}$ ? Kolika je emitirana brzina svjetlosti koju stvara čestica?

**6 bodova**

$$\beta = \frac{v_{\text{čestica}}}{n} = \frac{2,2 \cdot 10^5 \text{ km/s}}{1,5} = 1,467 \cdot 10^5 \text{ km/s} \quad 2 \text{ boda}$$

$$v_{em} = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}}{1,5} = 2 \cdot 10^5 \text{ km/s} \quad 2 \text{ boda}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{n\beta} = \frac{c}{nv_{\text{čestica}}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{c}{nv_{\text{čestica}}} = \arccos \frac{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}}{1,5 \cdot 2,2 \cdot 10^5 \text{ km/s}} = 24,62^{\circ}$$

2 boda

8. Dvojna zvijezda ima komponente čije su mase 3,5 i 2,5 puta veće od Sunčeve i one

obilaze oko središta mase po kružnim stazama. Orbitalni period sustava je 60 godina, a njegova udaljenost od Zemlje iznosi 35 pc. Izračunajte promjer objektiva teleskopa s kojim se mogu razlučiti obje komponente.

**5 bodova**

$$T^2 = \frac{a^3}{M_1 + M_2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{(M_1 + M_2) \cdot T^2} = \quad 1 \text{ bod}$$

$$= \sqrt[3]{(3,5 M_{\text{Sun}} + 2,5 M_{\text{Sun}}) \cdot (60 \text{ god.})^2} = 27,85 \text{ AJ} \quad 1 \text{ bod}$$

Kutna udaljenost između zvijezda je:  $\alpha = \frac{a}{d} = \frac{27,85 \text{ AJ}}{35 \text{ pc}} = 0,796'' \approx 0,8''$  1 bod

$$\sin \alpha = 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{1,22 \cdot \lambda}{\sin \alpha} = \frac{1,22 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{\sin 0,8''} = 0,173 \text{ m} = 17,3 \text{ cm}$$

Priznaje se i:  $\sin \alpha = \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \frac{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{\sin 0,8''} = 0,142 \text{ m} = 14,2 \text{ cm}$  2 boda

9. Hipotetsko nebesko tijelo koje pripada Sunčevu sustavu nalazi se u ravnini ekliptike.

Nakon opažanja sa Zemlje poznato je da je iznos godišnje paralakse tog tijela jednak iznosu godišnje aberacije svjetlosti. Odredite udaljenost tog tijela od Sunca i njegov period revolucije. Zanimarite prividni pomak tijela uslijed njegove revolucije oko Sunca.

Rješenje:

$$\frac{GMm}{r_{zs}^2} = \frac{mv^2}{r_{zs}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r_{zs}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}} = 29,8 \text{ km/s} \quad 1 + 1$$

bod

$$\text{tg } \varphi = \frac{v}{c} \Rightarrow \varphi = \text{arctg } \frac{v}{c} = \text{arctg } \frac{29,8 \text{ km/s}}{299800 \text{ km/s}} = 5,7 \cdot 10^{-3} (\text{°}) = 20,5'' \quad 1 + 1$$

bod

$$r = \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{20,5''} = 0,0488 \text{ pc} = 0,159 \text{ g.s.} = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{GM}{r} = v^2 = \left( \frac{2r\pi}{T} \right)^2 = \frac{4r^2\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1,5 \cdot 10^{15} \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} = 3,17 \cdot 10^{13} \text{ s} = 10^6 \text{ god} \quad 1 \text{ bod}$$

Ukupno: 7 bodova

10. Na CCD detektoru u spektroskopu opaženo je da je spektralna linija helija laboratorijske valne duljine 501,6 nm u spektru neke zvijezde pomaknuta za 17 piksela prema crvenom dijelu spektra. Razlučivost spektrometra iznosi 0,002 nm/pikselu. Ekliptička duljina zvijezde iznosi  $\lambda_z = 47^\circ 55'$ , a ekliptička širina  $\beta_z = -26^\circ 45'$ . U vrijeme snimanja spektra ekliptička duljina Sunca je iznosila

$\lambda_{\text{Sun}} = 223^\circ 14'$ . Odredite brzinu zvijezde u odnosu na Sunce. Koliko iznosi izmjerena valna duljina maksimuma zračenja te zvijezde ako je njena efektivna temperatura 7200 K?

$$\lambda_0 = 501,6 \text{ nm}$$

$$\Delta x = 17 \text{ px}$$

$$D = 0,002 \text{ nm/px}$$

$$\lambda_z = 47^\circ 55' = 47,917^\circ$$

$$\beta_z = -26^\circ 45' = -26,75^\circ$$

$$\lambda_{\text{Sun}} = 223^\circ 14' = 223,233^\circ$$

$$T_{\text{ef}} = 7200 \text{ K}$$

$$v_{z-S} = ?$$

$$\lambda_{\text{max}} = ?$$

$$\Delta \lambda = \Delta x \cdot D = 17 \text{ px} \cdot 0,002 \text{ nm/px} = 0,034 \text{ nm} \quad (1 \text{ bod})$$

Brzina zvijezde u odnosu na Zemlju:

$$v_{z-Z} = z \cdot c = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \cdot c \quad (1 \text{ bod})$$

$$v_{z-Z} = \frac{0,034 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{501,6 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} = 2,03 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 20,3 \text{ km/s} \quad (1 \text{ bod})$$

Brzina zvijezde u odnosu na Sunce:

$$v_{z-S} = v_{z-Z} - v_Z \cdot \sin(\lambda_z - \lambda_{\text{Sun}}) \cdot \cos \beta_z \quad (2 \text{ boda})$$

$$v_{z-S} = 20,3 \text{ km/s} - 29,8 \text{ km/s} \cdot \sin(47,917^\circ - 223,233^\circ) \cdot \cos(-26,75^\circ)$$

$$v_{z-S} = 20,3 \text{ km/s} - 29,8 \text{ km/s} \cdot (-0,08166) \cdot 0,893 = 20,3 \text{ km/s} + 2,2 \text{ km/s} = 22,5 \text{ km/s} \quad (1 \text{ bod})$$

$$b = \lambda_m \cdot T_{\text{ef}} \Rightarrow \lambda_m = \frac{b}{T_{\text{ef}}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\lambda_m = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ mK}}{7200 \text{ K}} = 402,78 \text{ nm} \quad (1 \text{ bod})$$

$$v_{z-Z} = z \cdot c = \frac{\lambda_{\text{max}} - \lambda_m}{\lambda_m} \cdot c \Rightarrow v_{z-Z} \cdot \lambda_m = c \cdot \lambda_{\text{max}} - c \cdot \lambda_m \quad (1 \text{ bod})$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{v_{z-Z} \cdot \lambda_m + c \cdot \lambda_m}{c} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2,03 \cdot 10^4 \text{ m/s} \cdot 4,0278 \cdot 10^{-7} \text{ m} + 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 4,0278 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 4,0281 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 402,81 \text{ nm} \quad (1 \text{ bod})$$

Ukupno: 11 bodova

TOTAL 71 bod

## ANALIZA PODATAKA

11. Dana 9. 2. 2015. godine mogao se opažati tranzit Kalista preko Jupiterova diska. Uzmi da se u 22<sup>h</sup>50<sup>m</sup> našao točno u njegovu središtu. Ako pretpostavimo da su Jupiterova, Kalistova i Zemljina staza oko Sunca kružnice i da leže u istoj ravnini, izračunaj trenutak kada bi se Kalisto prvi puta u lipnju opet našao ispred središta Jupiterova diska gledano sa Zemlje. Ekliptičke duljine Jupitera i Zemlje 9. 2. 2015. g. bile su  $\lambda_J = 137,8819^\circ$  i  $\lambda_Z = 140,6543^\circ$ . Prilikom računanja možete koristiti sljedeće podatke: polumjer Jupiterove staze  $a_J = 5,2043$  a.j., period revolucije Jupitera  $T_J = 4332,6$  d, polumjer Zemljine staze  $a_Z = 1$  a.j. ( $149,6 \cdot 10^6$  km), Period revolucije Zemlje  $T_Z = 365,256$  d, siderički period revolucije Kalista  $T_K = 16,6890$  d. Zbog ograničenog vremena dovoljno je računati samo jednu iteraciju.

**Ukupno 29 bodova**

kut koji zatvaraju Jupiter i Zemlja gledano iz Sunca:

$$\alpha_1 = \lambda_J - \lambda_Z = 137,8819^\circ - 140,6543^\circ = -2,7724^\circ \quad \mathbf{2 \text{ boda}}$$

iz sinusnog i kosinusnog poučka slijedi:

$$d_{JZ1} = \sqrt{a_J^2 + a_Z^2 - 2a_J a_Z \cos \alpha_1} = \sqrt{5,2043^2 + 1^2 - 2 \cdot 5,2043 \cdot 1 \cos(-2,7724^\circ)} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$d_{JZ1} = 4,2057 \text{ a.j.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

kut koji zatvaraju Zemlja i Sunce gledano s Jupitera:

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{a_Z}{d_{JZ1}} \cdot \sin \alpha_1\right) = \arcsin\left(\frac{1}{4,2057} \cdot \sin(-2,7747^\circ)\right) \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\varphi_1 = -0,6589^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Do 1. 6. 2015. u 22<sup>h</sup>50<sup>m</sup> proteklo je:

$$\Delta t = 28 - 9 + 31 + 30 + 31 + 1 = 112 \text{ dana} \quad \mathbf{2 \text{ boda}}$$



Broj ophoda Kalista oko Jupitera iznosi:

$$N_K = \frac{\Delta t}{T_K} = \frac{112}{16,6890} = 6,7 \Rightarrow N_K = 7 \quad \mathbf{2 \text{ boda}}$$

odnosno:

$$\Delta t = T_K \cdot N_K = 16,6890 \text{ d} \cdot 7 = 116,823 \text{ d} \quad \mathbf{2 \text{ boda}}$$

1. iteracija

$$\lambda_{j2} = \lambda_j + \Delta t \cdot \frac{360^\circ}{T_j} = 137,8819^\circ + 116,823 \text{ d} \cdot \frac{360^\circ}{4332,6 \text{ d}} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\lambda_{j2} = 147,5889^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\lambda_{z2} = \lambda_z + \Delta t \cdot \frac{360^\circ}{T_z} = 140,6543^\circ + 116,823 \text{ d} \cdot \frac{360^\circ}{365,256 \text{ d}} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\lambda_{z2} = 255,7962^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\alpha_2 = \lambda_{j2} - \lambda_{z2} = 147,5889^\circ - 255,7962^\circ = -108,2073^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$d_{jz2} = \sqrt{a_j^2 + a_z^2 - 2a_j a_z \cos \alpha_2} = \sqrt{5,2043^2 + 1^2 - 2 \cdot 5,2043 \cdot 1 \cos(-108,2073^\circ)} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$d_{jz1} = 5,5979 \text{ a.j.} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{a_z}{d_{jz2}} \cdot \sin \alpha_2\right) = \arcsin\left(\frac{1}{5,5979} \cdot \sin(-108,2073^\circ)\right) \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\varphi_2 = -9,7701^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

razlika kutova pod kojim se nalazi pravac Zemlja - Jupiter:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -9,7701^\circ + 0,6589^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\Delta\varphi = -9,1112^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Kalisto dolazi na taj pravac za kut koji se razlikuje za  $\Delta\varphi$  od punog ophoda pa je broj ophoda Kalista:

$$N_{K1} = N_{K1} + \frac{\Delta\varphi}{360^\circ} = 7 + \frac{-9,2724^\circ}{360^\circ} = 6,9742^\circ \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Zbog velike razlike u udaljenostima između Zemlje i Jupitera potrebno je uzeti u obzir i vrijeme koje je potrebno da svjetlost prevoli razliku tih udaljenosti u prvom i drugom trenutku.

$$\Delta t_{\text{svj}} = \frac{d_{\text{JZ2}} - d_{\text{JZ1}}}{c} = \frac{(5,5979 - 4,2057) \cdot 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}}{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

$$\Delta t_{\text{svj}} = 694 \text{ s} \quad \mathbf{2 \text{ boda}}$$

Trenutak kada će se Kalisto opet naći u središtu Jupiterova diska zbiti će se nakon perioda  $\Delta t$ .

$$\Delta t = T_K \cdot N_K + \Delta t_{\text{svj}} = 16,6890 \text{ d} \cdot 6,9742 + \frac{694 \text{ s}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{d}}} = 116,40046 \text{ d} \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Za bolju procjenu trenutka tranzita može se ponoviti ovaj postupak s novim početnim trenutkom  $\Delta t$ .

Datum 116 dana nakon 9. 2. 2015. je 5. 6. 2015., a početnom vremenu od 22<sup>h</sup>50<sup>m</sup> treba dodati 0,40046 dana (9<sup>h</sup>37<sup>m</sup>) pa će se središnja faza tranzita zbiti 6. 6. 2015. oko 8<sup>h</sup>27<sup>m</sup>.

**1 bod**