

1. U galaktici s crvenom pomakom 0,075 uočena je supernova tipa Ia kojoj je na osnovu mjerenja teleskopom utvrđeno da joj sjaj iznosi $7,4 \cdot 10^{-8}$ sjaja Vege. Koliko je udaljena ova galaktika (u pc) i koliko je Hubbleovo vrijeme ako je luminozitet supernove iznosio $5,9 \cdot 10^9 L_{\text{Sunca}}$. Pravidna zvjezdana veličina Vege iznosi 0^m .

Ukupno 8 bodova

$$\frac{E_{\text{Sunce}}}{E_{\text{Vega}}} = 2,512^{m_{\text{Vega}} - m_{\text{Sunce}}} \Rightarrow E_{\text{Vega}} = \frac{E_{\text{Sunce}}}{2,512^{m_{\text{Vega}} - m_{\text{Sunce}}}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$E_{\text{Vega}} = \frac{E_{\text{Sunce}}}{2,512^{26,8}} = 1,903 \cdot 10^{-11} E_{\text{Sunce}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$E_{\text{supernove}} = 7,4 \cdot 10^{-8} E_{\text{Vega}} = 7,4 \cdot 10^{-8} \cdot 1,903 \cdot 10^{-11} E_{\text{Sunca}} = 1,408 \cdot 10^{-18} E_{\text{Sunca}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{L_{\text{supernove}}}{4\pi \cdot d_{\text{gal}}^2} = 1,408 \cdot 10^{-18} \frac{L_{\text{Sunce}}}{4\pi \cdot d_{\text{Sunce}}^2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$d_{\text{gal}} = \sqrt{\frac{L_{\text{supernove}}}{1,408 \cdot 10^{-18} L_{\text{Sunca}}}} \cdot d_{\text{Sunce}} = \sqrt{\frac{5,9 \cdot 10^9 L_{\text{Sunce}}}{1,408 \cdot 10^{-18} L_{\text{Sunce}}}} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$d_{\text{gal}} = 9,684 \cdot 10^{24} \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$d_{\text{gal}} = \frac{9,684 \cdot 10^{24} \text{ m}}{3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}} = 313,8 \text{ Mpc} \quad 1 \text{ bod}$$

$$t_{\text{H}} = \frac{1}{H_0} = \frac{d_{\text{gal}}}{v_{\text{gal}}} = \frac{d_{\text{gal}}}{c \cdot z} \quad 1 \text{ bod}$$

$$t_{\text{H}} = \frac{9,684 \cdot 10^{24} \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 0,075} = 4,288 \cdot 10^{17} \text{ s} = 13,6 \text{ milijarde godina} \quad 1 \text{ bod}$$

2. Bijeli patuljak efektivne površinske temperature od 25000 K i apsolutne bolometrijske zvjezdane veličine $11,1^m$ ima masu koja mu je procijenjena na 95% mase Sunca. Frekvencija na kojoj mu je maksimum zračenja izmjerena je spektroskopom i iznosi $2,588 \cdot 10^{15}$ Hz. Koliki mu je polumjer, gustoća, te kojom se brzinom i u kojem smjeru giba u odnosu na nas. Apsolutna bolometrijska zvjezdana veličina Sirijusa je $1,42^m$, luminozitet Sirijusa je $9,8 \cdot 10^{27}$ W.

Ukupno 8 bodova

$$\frac{L_{\text{Sirijus}}}{L_{\text{BP}}} = 2,512^{M_{\text{BP}} - M_{\text{Sirijus}}} \Rightarrow L_{\text{BP}} = \frac{L_{\text{Sirijus}}}{2,512^{M_{\text{BP}} - M_{\text{Sirijus}}}}$$

$$L_{\text{BP}} = \frac{9,8 \cdot 10^{27} \text{ W}}{2,512^{11,1-1,42}} = 1,32 \cdot 10^{24} \text{ W} \quad 1 \text{ bod}$$

$$L_{\text{BP}} = \sigma \cdot S \cdot T^4 = \sigma 4\pi R_{\text{BP}}^2 T_{\text{BP}}^4$$

$$R_{\text{BP}} = \sqrt{\frac{L_{\text{BP}}}{\sigma 4\pi T_{\text{BP}}^4}} = \sqrt{\frac{1,32 \cdot 10^{24} \text{ W}}{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \cdot 4\pi \cdot (25000 \text{ K})^4}} = 2,18 \cdot 10^6 \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\rho = \frac{m_{\text{BP}}}{V} = \frac{m_{\text{BP}}}{\frac{4}{3} R_{\text{BP}}^3 \pi} = \frac{0,95 \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{\frac{4}{3} \cdot (2,18 \cdot 10^6 \text{ m})^3 \pi} = 4,356 \cdot 10^{10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad 1 \text{ bod}$$

$$b = \lambda_m T \Rightarrow \lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ mK}}{25000 \text{ K}} = 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\lambda_{\text{op}} = \frac{c}{\nu_{\text{op}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,588 \cdot 10^{15} \text{ Hz}} = 1,159 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$z = \frac{v}{c} = \frac{\lambda_{\text{op}} - \lambda_m}{\lambda_m} = \frac{\nu_m - \nu_{\text{op}}}{\nu_{\text{op}}}$$

$$z = \frac{1,159 \cdot 10^{-7} \text{ m} - 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1,16 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = -8,62 \cdot 10^{-4} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v = c \cdot z = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot (-8,62 \cdot 10^{-4}) = -258,6 \text{ km/s} \quad 1 \text{ bod}$$

Približava nam se 1 bod

3. Izvangalaktički oblak neutralnog vodika prividnih kutnih dimenzija 3,8" opažan je radioteleskopom. Utvrđeno je da mu je širina spektralne linije 0,11 mm na valnoj duljini 23,1 cm gdje najjače zrači. Ista linija u laboratorijskim uvjetima ima valnu duljinu 21 cm. Odredite masu tog vodikova oblaka.

Ukupno 7 bodova

$$v = cz = c \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot \frac{23,1 \text{ cm} - 21 \text{ cm}}{21 \text{ cm}} = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v = H \cdot r \Rightarrow r = \frac{v}{H} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{69 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}} = 434,9 \text{ Mpc} = 1,342 \cdot 10^{25} \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$R = r \cdot \text{tg} \frac{\phi}{2} = 1,342 \cdot 10^{25} \text{ m} \cdot \text{tg} \frac{3,8''}{2} = 1,236 \cdot 10^{20} \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{v_0}{c} = \frac{\lambda_{\text{sirina}} / 2}{\lambda_1} \Rightarrow v_0 = c \frac{\lambda_{\text{sirina}}}{2\lambda_1} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \frac{0,11 \text{ mm}}{2 \cdot 231 \text{ mm}} = 71,43 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz virijalnog teorema ili uz pretpostavku da je brzina atoma plina na udaljenosti R jednaka prvoj kozmičkoj brzini uz masu M :

$$2 \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{GM^2}{R} = 0$$

$$v_0^2 = \frac{GM}{R}$$

$$M = \frac{v_0^2 \cdot R}{G} \quad 1 \text{ bod}$$

$$M = \frac{(71430 \text{ m/s})^2 \cdot 1,24 \cdot 10^{20} \text{ m}}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}} = 9,45 \cdot 10^{39} \text{ kg} \quad 1 \text{ bod}$$

4. Promatrajući cirkumpolarnu zvijezdu astronom je izmjerio da su najmanja i najveća visina zvijezde $38^{\circ}29'$, odnosno $79^{\circ}34'$. S mjesta opažanja vidjela se Sjevernjača. Izračunajte koje su sve moguće koordinate zvijezde, kao i sve moguće geografske širine mjesta promatranja, ako je mjesno zvjezdano vrijeme iznosilo $4^{\text{h}}15^{\text{m}}$ u trenutku kada je zvijezda bila u donjoj kulminaciji.

Ukupno 6 bodova

Satni kut zvijezde u donjoj kulminaciji je: $H_{\text{zvijezde}} = 12^{\text{h}}$ 1 bod

$LST = \alpha + H_{\text{zvijezde}} \Rightarrow \alpha = LST - H_{\text{zvijezde}} = 4^{\text{h}}15^{\text{m}} - 12^{\text{h}} = -7^{\text{h}}45^{\text{m}} = 16^{\text{h}}15^{\text{m}}$ 1 bod

Za izračun deklinacije i geografske širine imamo dvije mogućnosti:

a) gornja kulminacija je izmjerena sjeverno od zenita, tj. $h_g = 79^{\circ}34' \text{ N}$, te je tada:

$$\varphi = h_d + \frac{h_g - h_d}{2} = 38^{\circ}29' + \frac{79^{\circ}34' - 38^{\circ}29'}{2} = 59^{\circ}1'30'' \quad 1 \text{ bod}$$

$$\delta = 90^{\circ} - (\varphi - h_d) = 90^{\circ} - (59^{\circ}1'30'' - 38^{\circ}29') = 69^{\circ}27'30'' \quad 1 \text{ bod}$$

b) gornja kulminacija je izmjerena južno od zenita, tj. $h_g = 79^{\circ}34' \text{ S}$

$$\varphi = h_d + \frac{90^{\circ} - h_g + 90^{\circ} - h_d}{2} = 38^{\circ}29' + \frac{90^{\circ} - 79^{\circ}34' + 90^{\circ} - 38^{\circ}29'}{2} = 69^{\circ}27'30'' \quad 1 \text{ bod}$$

$$\delta = 90^{\circ} - (\varphi - h_d) = 90^{\circ} - (69^{\circ}27'30'' - 38^{\circ}29') = 59^{\circ}1'30'' \quad 1 \text{ bod}$$

5. CMOS senzor kamere ASI294MM Pro dimenzija $19,1 \times 13,0 \text{ mm}$ ima matricu od 4144×2822 piksela. Ako bi kameru postavili na teleskop Zvezdarnice Zagreb promjera objektiva $17,5 \text{ cm}$ i f-broja $f/8$ koliki bi kut mogli razlučiti po pikselu? Ako umjesto kamere na teleskop stavimo okular žarišne daljine 13 mm i vidnog polja 82° koliko bi bilo povećanje i stvarno vidno polje teleskopa?

Ukupno 5 bodova

$$\text{veličina piksela: } l = \frac{d}{N_{\text{pix}}} = \frac{19,1 \text{ mm}}{4144} = 4,609 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\text{ili } l = \frac{d}{N_{\text{pix}}} = \frac{13,0 \text{ mm}}{2822} = 4,607 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$F = D \cdot f\text{-broj} = 0,175 \text{ m} \cdot 8 = 1,4 \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{l}{F} \Rightarrow \alpha = \text{arctg } \frac{l}{F}$$

$$\alpha = \text{arctg } \frac{4,609 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{1,4 \text{ m}} = 1,886 \cdot 10^{-4} (\text{ }^{\circ} / \text{pix}) = 0,679'' / \text{pix} \quad 1 \text{ bod}$$

$$A = \frac{F}{f} = \frac{1400 \text{ mm}}{13 \text{ mm}} = 107,7 \times \quad 1 \text{ bod}$$

$$SVP = \frac{PVP}{A} = \frac{82^{\circ}}{107,7 \times} = 0,761^{\circ} \quad 1 \text{ bod}$$

6. Na kolikoj udaljenosti od bijelog patuljka iz zadatka br. 2. bi se trebalo nalaziti nebesko tijelo slično Ganimedu polumjera 2634 km da bi prosječna efektivna temperatura na njemu bila jednaka kao i prosječna na Ganimedu? Izračunajte i tu temperaturu. Albedo Ganimeda iznosi 0,43.

Ukupno 9 bodova

Solarna konstanta na Ganimedu:

$$F_{\text{Gan}} = \frac{L_{\text{Sun}}}{4d_{\text{Gan}}^2 \pi} = \frac{3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}}{4(7,78 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \pi} = 50,75 \text{ W/m}^2 \quad 1 \text{ bod}$$

Ukupna snaga zračenja koja dolazi na površinu Ganimeda:

$$L_{\text{uk}} = F_{\text{Gan}} \cdot r_{\text{Gan}}^2 \cdot \pi = 50,75 \text{ Wm}^{-2} \cdot (2,634 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \pi = 1,106 \cdot 10^{15} \text{ W} \quad 1 \text{ bod}$$

Iznos snage zračenja koju apsorbira Ganimed:

$$L_{\text{uk-A}} = (1 - A_{\text{Gan}}) \cdot L_{\text{uk}} = (1 - 0,43) \cdot 1,106 \cdot 10^{15} \text{ W} = 6,304 \cdot 10^{14} \text{ W} \quad 1 \text{ bod}$$

$$L_{\text{uk-A}} = \sigma S_{\text{Gan}} T_{\text{ef}}^4 = \sigma \cdot 4 \cdot r_{\text{Gan}}^2 \cdot \pi \cdot T_{\text{ef}}^4 \Rightarrow T_{\text{ef}} = \sqrt[4]{\frac{L_{\text{uk-A}}}{\sigma \cdot 4 \cdot r_{\text{Gan}}^2 \cdot \pi}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$T_{\text{ef}} = \sqrt[4]{\frac{6,304 \cdot 10^{14} \text{ W}}{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4} \cdot 4 \cdot (2,634 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \pi}} = 106,3 \text{ K} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{L_{\text{Sun}}}{L_{\text{bp}}} = 2,512^{M_{\text{bp}} - M_{\text{Sun}}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$L_{\text{bp}} = \frac{L_{\text{Sun}}}{2,512^{M_{\text{bp}} - M_{\text{Sun}}}} = \frac{3,86 \cdot 10^{26} \text{ W}}{2,512^{11,1-4,82}} = 1,178 \cdot 10^{24} \text{ W} \quad 1 \text{ bod}$$

$$L_{\text{bp}} = F_{\text{Gan}} \cdot 4(d_{\text{bp-Gan}})^2 \pi \Rightarrow d_{\text{bp-Gan}} = \sqrt{\frac{L_{\text{bp}}}{F_{\text{Gan}} \cdot 4\pi}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$d_{\text{bp-Gan}} = \sqrt{\frac{1,178 \cdot 10^{24} \text{ W}}{50,75 \text{ Wm}^{-2} \cdot 4\pi}} = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ m} = 43 \text{ milijuna km} \quad 1 \text{ bod}$$

7. Crveni pomak gama-bljeska koji je dana 19. ožujka 2008. g. detektirao satelit Swift iznosio je 0,937. Njegova prividna zvjezdana veličina u vidljivom dijelu spektra iznosila je 5,3^m. Na kojoj se udaljenosti nalazio i koliko je iznosila njegova apsolutna zvjezdana veličina. Na kojoj bi valnoj duljini (zbog crvenog pomaka) bila opažena emisijska linija H_α, laboratorijske valne duljine 656,3 nm. Zanimarite ekstinkciju.

Ukupno 8 bodova

$$(z+1)^2 = \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow (z+1)^2 \cdot c - (z+1)^2 \cdot v = c+v \Rightarrow v \cdot ((z+1)^2 + 1) = c \cdot ((z+1)^2 - 1)$$

$$v = \frac{c \cdot ((z+1)^2 - 1)}{(z+1)^2 + 1} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot (1,937^2 - 1)}{1,937^2 + 1} = 1,737 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v = H_0 \cdot r \Rightarrow r = \frac{v}{H_0} \quad 1 \text{ bod}$$

$$r = \frac{1,737 \cdot 10^5 \text{ km/s}}{69 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}} = 2,517 \cdot 10^9 \text{ pc} \quad 1 \text{ bod}$$

$$M = m + 5 - 5 \log r [\text{pc}] \quad 1 \text{ bod}$$

$$M = 5,3 + 5 - 5 \log 2,517 \cdot 10^9 = -36,7^m \quad 1 \text{ bod}$$

$$1+z = \frac{\lambda_{\text{opaženo}}}{\lambda_{\text{emitirano}}} \Rightarrow \lambda_{\text{opaženo}} = (1+z) \cdot \lambda_{\text{emitirano}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\lambda_{\text{opaženo}} = (1+0,937) \cdot 6,563 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 1,271 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

8. Letjelica New Horizons prošla je 1. siječnja 2019. g. brzinom od 14,4 km/s pokraj planetoida Kuiperova pojasa 486958 Arrokotha, koji se tada nalazio na udaljenosti od 44,2 AJ od Sunca. Kada se letjelica nađe na udaljenosti gdje Sunčev gravitacijski potencijal postane zanemariv kojom će se brzinom udaljavati od njega (tzv. asimptotska brzina). Kojom je brzinom trebao biti lansiran sa Zemlje (u odnosu na Sunce) da bi postigao takvu brzinu. Zanemarite dodatno ubrzanje uslijed prolaska pokraj Jupitera.

Ukupno 9 bodova

$$E_{\text{uk}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{grav}} = \frac{mv^2}{2} - G \frac{M_S m}{r} \quad 1 \text{ bod}$$

$$E_{K1} + E_{G1} = E_{K2} + 0 \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{mv_{\text{NH}}^2}{2} - G \frac{M_S \cdot m}{r_p} = \frac{mv_{\infty}^2}{2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_{\infty}^2 = v_{\text{NH}}^2 - 2G \frac{M_S}{r_p} \Rightarrow v_{\infty} = \sqrt{v_{\text{NH}}^2 - 2G \frac{M_S}{r_p}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_{\infty} = \sqrt{(14400 \text{ m/s})^2 - 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{44,2 \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}} = 12900 \text{ m/s} \quad 1 \text{ bod}$$

$$E_{KZ} + E_{GZ} = E_{K2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{mv_Z^2}{2} - G \frac{M_S \cdot m}{r_Z} = \frac{mv_{\infty}^2}{2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_Z^2 = v_{\infty}^2 + 2G \frac{M_S}{r_Z} \Rightarrow v_Z = \sqrt{v_{\infty}^2 + 2G \frac{M_S}{r_Z}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_Z = \sqrt{(12900 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}} = 44100 \text{ m/s} \quad 1 \text{ bod}$$